حل المعادلات فى ح

حل معادلتين من الدرجة الأولى جبرياً وبيانياً وتطبيقات عليها

أولاً : حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً

لحل معادلتين من الدرجة الأولى بيانياً :

أولاً : نرسم المستقيم $ل_1$ الذى يمثل المعادلة الأولى بيانياً .

ثانياً : نرسم المستقيم $ل_2$ الذى يمثل المعادلة الثانية بيانياً .

ثالثاً : نقطة تقاطع المستقيم $ل_1$ ، $ل_2$ هى الحل المشترك للمعادلتين

ملحوظة هامة :

*بفرض أن : أ س + ب ص = جـ يمثلها المستقيم $ل_1$ ، م س + ن ص = ء يمثلها المستقيم $ل_2$

فإن : $ل_1$ ، $ل_2$ لهما ثلاثة أوضاع تعبر عن حل المعادلتين معاً :

(١) إذا تقاطع $ل_1$ ، $ل_2$ فى نقطة واحدة : فإن المعادلتين لهما حل مشترك وحيد يمثله نقطة التقاطع .

(٢) إذا انطبق $ل_1$ ، $ل_2$: فإن المعادلتين لهما عدد غير منته من الحلول يمثله نقاط أى من المستقيمين .

(٣) إذا توازى $ل_1$ ، $ل_2$ فإن المعادلتين ليس لهما حل مشترك م . ح = $\emptyset$

مثال ١ : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين بيانياً

س + ص = ٤ ، ٢س – ص = ٢

الحل :

فى المعادلة الأولى

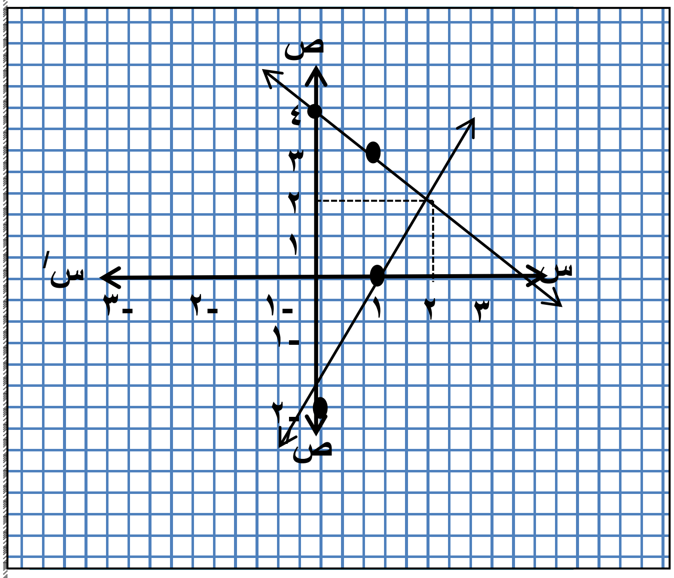
بوضع س = ٠ ∴ ص = ٤ ∴ (٠ ، ٤) حل للمعادلة الأولى

، بوضع س = ١ ∴ ١ + ص = ٤ ∴ ص = ٤ – ١ = ٣ ∴ (١ ، ٣) حل للمعادلة الأولى

في المعادلة الثانية :

بوضع س = ٠ ∴ ٢ × ٠ – ص = ٢ ∴ - ص = ٢ ∴ ص = - ٢ ∴ (٠ ، - ٢) حل للمعادلة الثانية

بوضع س = ١ ∴ ٢ × ١ – ص = ٢ ∴ - ص = ٢ – ٢ ∴ ص = ٠ ∴ (١ ، ٠) حل للمعادلة الثانية



من الشكل $ل_١ \cap ل_٢$ هو النقطة (٢ ، ٢)

∴ مجموعة الحل للمعادلتين هى {(٢ ، ٢)}

مثال ٢ : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : ص = ٢س – ١ ، ص = ٢س + ٣

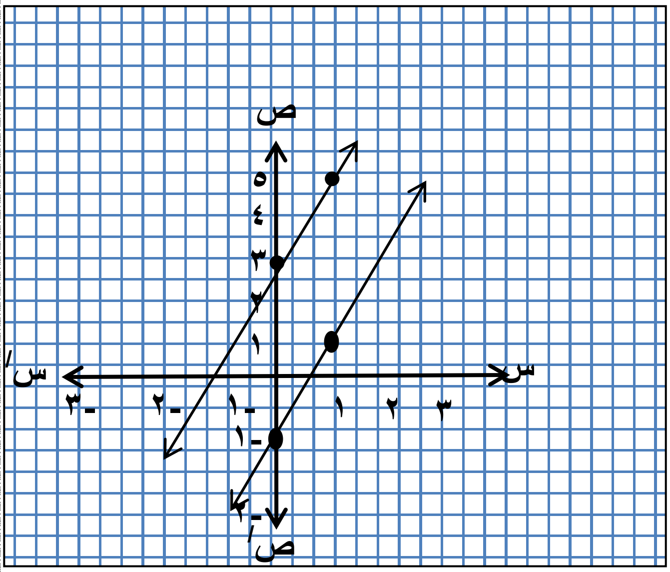
الحل :

في المعادلة الأولى :

بوضع س = ٠ ∴ ص = ٢ × ٠ – ١ ∴ ص = -١ ∴ (٠ ، -١) حل للمعادلة الأولى

بوضع س = ١ ∴ ص = ٢ × ١ – ١ ∴ ص = ١ ∴ (١ ، ١) حل للمعادلة الأولى

في المعادلة الثانية :



بوضع س = ٠ ∴ ص = ٢ × ٠ + ٣ ∴ ص = ٣

∴ (٠ ، ٣) حل للمعادلة الثانية

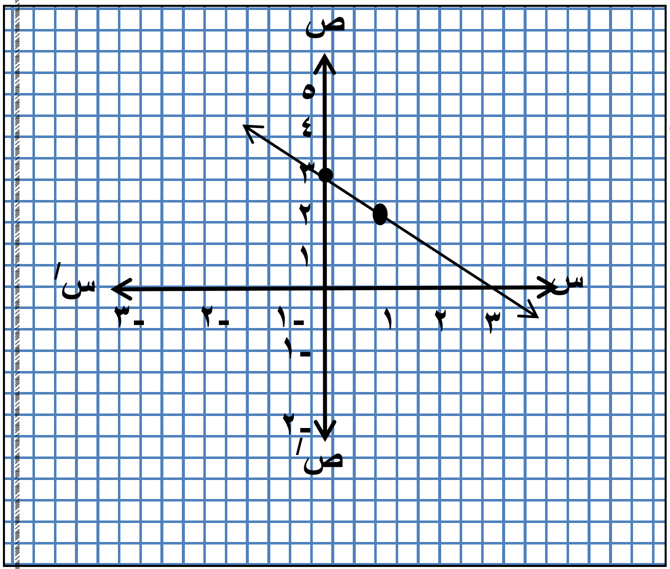
بوضع س = ١ ∴ ص = ٢ × ١ + ٣ ∴ ص = ٥

∴ (١ ، ٥) حل للمعادلة الثانية

∵ $ل_١ \cap ل_٢ = \emptyset$ ∴ أى أنه لا يوجد حل للمعادلتين

مثال ٣ : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : ٢س + ٢ص = ٦ ، س + ص = ٣

الحل :



فى المعادلة الأولى :

بوضع س = ٠ ∴ ص = ٣ ∴ (٠ ، ٣) حل للمعادلة الأولى

بوضع س = ١ ∴ ص = ٢ ∴ (١ ، ٢) حل للمعادلة الأولى

فى المعادلة الثانية :

بوضع س = ٠ ∴ ص = ٣ ∴ (٠ ، ٣) حل للمعادلة الثانية

بوضع س = ١ ∴ ص = ٢ ∴ (١ ، ٢) حل للمعادلة الثانية

نلاحظ من الشكل أن المستقيمان منطبقان

∴ المعادلتين لهما عدد لانهائى من الحلول . ومجموعة الحل هى : {(س ، ص) : ص = ٣ – س }

ملحوظة هامة : لمعرفة عدد حلول المعادلتين نجد الميل لكل مستقيم على حدة

١) إذا كان $م_١ \neq م_٢$ فإن المستقيمان متقاطعان ولهما حل واحد فقط

٢) إذا كان $م_١ = م_٢$ والجزء المقطوع من ص فى المعادلة الأولى = الجزء المقطوع من ص فى المعادلة الثانية فإن المستقيمان منطبقان ولهما عدد لا نهائى من الحلول

٣) إذا كان $م_١ = م_٢$ والجزء المقطوع من ص فى المعادلة الأولى $\neq$ الجزء المقطوع من ص فى المعادلة الثانية فإن المستقيمان متوازيان ليس لهما حل مشترك عدد الحلول = صفر

تمارين

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :-

١) التمثيل البيانى للمعادلتين س + ص = ٣ ، س + ص = ٥ عبارة عن مستقيمين ....

(متقاطعان ، متعامدان ، متوازيان ، متطابقان)

٢) نقطة تقاطع المستقيمين س – ٣ = ٠ ، ص + ٤ = ٠ هو .....

({٣ ، -٤} ، (٣ ، -٤) ، {-٣ ، ٤} ، {(٣ ، -٤)})

٣) التمثيل البيانى للمعادلتين : س + ٧ص = ٥ ، ٢س + ١٠ص = ١٠ عبارة عن مستقيمان ....

(متقاطعان ، متعامدان ، متوازيان ، متطابقان)

---

(٢) أوجد بيانياً مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :ـ

١) ص + س = ٧ ، ص = ٢س + ١ ٢) ٢س + ص = ١ ، س + ٢ص = ٥

ثانياً : حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبرياً :

يتم حل المعادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بالتخلص من أحد المتغيرين فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد ، وبحلها نحصل على قيمة هذا المتغير ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الذى سبق التخلص منه ويتم ذلك بإحدى الطريقتين :

١) طريقة التعويض ٢) طريقة الحذف

أولاً : طريقة التعويض :

نفرض أن لدينا المعادلتين : س – ص = ١ ، ٢س + ص = ٥ نقوم بتعديل شكل إحدى المعادلتين بحيث تكونعلى صورة س = أو ص =

فمن المعادلة (١) $\boxed{\text{س = ١ + ص}}$ بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة (٢)

∴ ٢(١ + ص) + ص = ٥ ∴ ٢ + ٢ص + ص = ٥ ∴ ٣ص + ٢ = ٥ ∴ ٣ص = ٣ ∴ ص = ١

نحصل على المتغير الأخر من المعادلة التى تم تعديل شكلها ∵ س = ١ + ١ = ٢ ∴ م . ح = {(٢ ، ١)}

ثانياً : طريقة الحذف :

كيفية الحل بطريقة الحذف :

١) نكتب كلاً من المعادلتين على الصورة : ٢س + ب ص = ج

٢) نجعل معامل أحد المتغيرين س أو ص فى المعادلتين معكوس جمعى للأخر .

٣) بجمع المعادلتين نحصل على معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد س أو ص ومنها نحصل على س أو ص
٤) بالتعويض عن قيمة المتغير الذى حصلنا عليه فى إحدى المعادلتين نحصل على معادلة من الدرجة الأولى فى المتغير الثانى
٥) مجموعة الحل = {(س ، ص)}

فى المعادلتين السابقتين س – ص = ١ ، ٢س + ص = ٥

نجد أن المعادلتين على الصورة العامة لهما كما أن المتغير – ص هو معكوس جمعى للمتغير ص ∴ نجمع مباشرةً

س – ~~ص~~ = ١
٢س + ~~ص~~ = ٥

٣س = ٦ ومنها س = ٢ بالتعويض عن قيمة س فى إحدى المعادلتين ∴ ٢ × ٢ + ص = ٥ ∴ ص = ١

مجموعة الحل هى {(٢ ، ١)}

مثال ١ : حل المعادلتين ٢س – ٣ص = ١ ، س + ص = ٣

الحل : ١) طريقة التعويض :

المتغيرين س ، ص معاملاتها أكبر من ١ ∴ يصعب تعديلها على صورة س = أو ص = ∴ نعدل المعادلة الثانية من المعادلة (٢) ∴ س = ٣ – ص بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة (١)

∴ ٢ (٣ – ص) – ٣ص = ١ ∴ ٦ – ٢ص – ٣ص = ١ ∴ - ٥ص = - ٥ ∴ ص = ١

∴ س = ٣ – ١ ∴ س = ٢ ∴ م . ح = {(٢ ، ١)}

٢) طريقة الحذف : نجعل أحد المتغيرين معكوس جمعى للآخر ∴ نضرب المعادلة الثانية × ٣ ونجمع المعادلتين معاً

٢س - ~~٣ص~~ = ١
٣س + ~~٣ص~~ = ٩

٥س = ١٠ ومنها س = ٢ بالتعويض عن قيمة س فى إحدى المعادلتين ∴ ٣ × ٢ + ٣ص = ٩
∴ ٦ + ٣ص = ٩ ومنها ٣ص = ٣ ∴ ص = ١ ∴ م . ح = {(٢ ، ١)}

مثال ٢: أوجد قيمتى أ ، ب علماً بأن (٢ ، ١) حل للمعادلتين : ٢ أ س − ب ص = ٣ ، أ س +٢ ب ص = ٤

الحل :

∵ (٢ ، ١) حل للمعادلتين : ∴ (٢ ، ١) حل للمعادلة ٢ أ س − ب ص = ٣ ∴ ٤أ − ب = ٣ ← (١)

∴ (٢ ، ١) حل للمعادلة أ س +٢ ب ص = ٤ ∴ ٢أ + ٢ب = ٤ بالقسمة على ٢ ∴ أ + ب = ٢ ← (٢)

بجمع المعادلتين ∴ ٥أ = ٥ ∴ $\boxed{\text{أ} = ١}$ بالتعويض فى المعادلة (٢) ∴ ١ + ب = ٢ ∴ $\boxed{\text{ب} = ١}$

تمـاريـن

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :ـ

١) عدد حلول المعادلتين س + ٢ص = ٢ ، س + ٢ص = ٣ هو .....
(حل وحيد ، ليس لهما حل ، عدد لانهائى من الحلول ، حلان فقط)

٢) مجموعة الحل للمعادلتين : ص = ٢ ، س = ٣ فى ح × ح هى ....
({(٢ ، ٣)} ، {٣ ، ٢} ، {(٣ ، ٢)} ، {(٣ ، -٢)})

٣) نقطة تقاطع المستقيمين ص = س ، س + ٢ = ٠ هما ....
((٢ ، ٢) ، (-٢ ، ٢) ، (٢ ، -٢) ، (-٢ ، -٢))

٤) المستقيمان ٣س + ٥ص = ٠ ، ٥س − ٣ص = ٠ يتقاطعان فى ......
(نقطة الأصل ، الربع الأول ، الربع الثانى ، الربع الرابع)

٥) إذا كان للمعادلتين س + ٤ص = ٧ ، ٣س + ك ص = ٢١ عدد لا نهائى من الحلول فإن ك = ...
(٤ ، ٧ ، ١٢ ، ٢١)

---

(٢) أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

١) س = ٢ ، ٢س + ص = ١   ٢) س + ص = ٥ ، ص − س = -١

٣) ٢س − ص = ٣ ، ٣س + ص = ٧   ٤) س − ص = ١ ، س + ٢ص = -٥

٥) س + ٢ص = ٤ ، س – ٣ص + ٦ = ٠   ٦) س + $\frac{\text{ص}}{٢} = \frac{٥}{٢}$ ، $\frac{\text{ص}}{٢}$ - س = $\frac{-٣}{٢}$

---

(٣) إذا كان (٣ ، - ٢) حلاً للمعادلتين : ٢س – ب ص = ٥ ، ٢س + ب ص= ١ أوجد قيمتى ٢ ، ب

تطبيقات حل على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين (مسائل لفظية)

مثال ١ : عدد مكون من رقمين مجموعهما ٥ وإذا تغير وضع الرقمين فإن العدد الناتج ينقص عن العدد الأصلى بمقدار ٩ فما هو العدد الأصلى ؟

الحل :

نفرض أن رقم الآحاد س ، ورقم العشرات ص ∴ س + ص = ٥ ← (١)

العدد = س + ١٠ص ، العدد بعد تغيير وضعى الرقمين = ص + ١٠س

∴ (ص + ١٠س) – (س + ١٠ص) = ٩ ∴ س – ص = ١ ← (٢) بالجمع

∴ ٢س = ٦ ∴ س = ٣ بالتعويض فى (١) ∴ ٣ + ص = ٥ ∴ ص = ٥ – ٣ = ٢ ∴ العدد ٣٢

مثال ٢ : منذ ٦ سنوات كان عمر رجل ستة أمثال عمر ابنه وبعد عشر سنوات يكون عمر الرجل ضعف عمر ابنه فما عمر كلاً منهما الآن ؟

الحل :

نفرض أن عمر الرجل الآن س وعمر الأبن الآن ص سنة

عمر الرجل منذ ٦ سنوات = س – ٦ ، وعمر الأبن منذ ٦سنوات = ص – ٦ ∴ س – ٦ = ٦(ص – ٦)

= س – ٦ = ٦ص – ٣٦ ∴ س – ٦ص = -٣٠ ← (١)

، عمر الرجل بعد عشر سنوات = س + ١٠ ، عمر الأبن بعد عشر سنوات = ص + ١٠

∴ س + ١٠ = ٢(ص + ١٠) ∴ س + ١٠ = ٢ص + ٢٠ ∴ س – ٢ص = ١٠ ← (٢) بضرب المعادلة الثانية × - ٣ والجمع

∴ س − ٦ص = -٣٠

-٣س + ٦ص = -٣٠ ∴ -٢س = -٦٠ ∴ س = ٣٠ ∴ عمر الرجل ٣٠ سنة

بالتعويض فى (٢) ∴ ٣٠ − ٢ص = ١٠ ∴ -٢ص = -٢٠ ∴ ص = ١٠ ∴ عمر الأبن = ١٠ سنوات

تمارين

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :-

١) مستطيل طوله س سم ، وعرضه ص سم فإن محيطه = ...

(س − ص ، س ص ، ٢(س + ص) ، ٢س + ص)

٢) إذا كان عمر رجل الآن س سنة فإن عمره منذ ٣ سنوات يكون .....

(س − ٣ ، س + ٣ ، ٣س ، س ÷ ٣)

---

(٢) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٦سم ، فإذا كان ضعف طوله مضاف إليه خمسة أمثال عرضه يساوى ٧٥ سم أوجد كلاً من بعدى المستطيل .

---

(٣) الفرق بين عمر رجل وابنه ٢٨ سنة وبعد ٣ سنوات يكون مجموع عمريهما ٤٠ سنة . أوجد عمر كل منهما الآن

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانياً

المعادلة ؟س^{٢} + ب س + جـ = ٠ (حيث ؟ ≠ ٠ ، ؟ ، ب ، جـ ∈ ح)

*فمثلاً المعادلة س^{٢} − س − ٢ = ٠ هى معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد هو س

لحل هذه المعادلة : س^{٢} − س − ٢ = صفر نحلل الطرف الأيمن فتأخذ المعادلة الصورة

(س − ٢) (س + ١) = ٠ ∴ س − ٢ = ٠ أو س + ١ = ٠ ∴ س = ٢ أو س = -١ م . ح = {٢ ، -١}

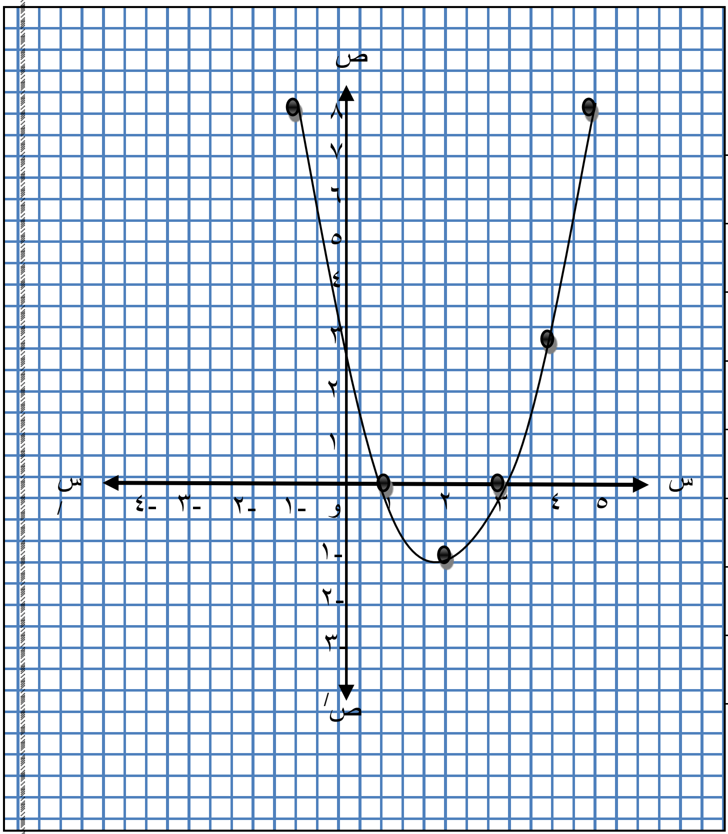
ويسمى كل من ٢ ، -١ بجذرا المعادلة ، ويسمى هذا الحل بالحل الجبرى

*ولحل هذه المعادلة بيانياً نعين نقط تقاطع الشكل الممثل لهذه الدالة مع محور السينات فتكون الإحداثيات السينية لهذه النقط هو مجموعة حل المعادلة : د(س) = ٠

مثال ١ : ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} – ٤س + ٣ فى الفترة [- ١ ، ٥] ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} – ٤س + ٣ = ٠

الحل :

س	س^{٢}	-٤س	+٣	ص	(س ، ص)
-١	١	٤	+٣	٨	(-١ ، ٨)
٠	٠	٠	+٣	٣	(٠ ، ٣)
١	١	-٤	+٣	٠	(١ ، ٠)
٢	٤	- ٨	+٣	-١	(٢ ، -١)
٣	٩	-١٢	+٣	٠	(٣ ، ٠)
٤	١٦	-١٦	+٣	٣	(٤ ، ٣)
٥	٢٥	-٢٠	+٣	٨	(٥ ، ٨)

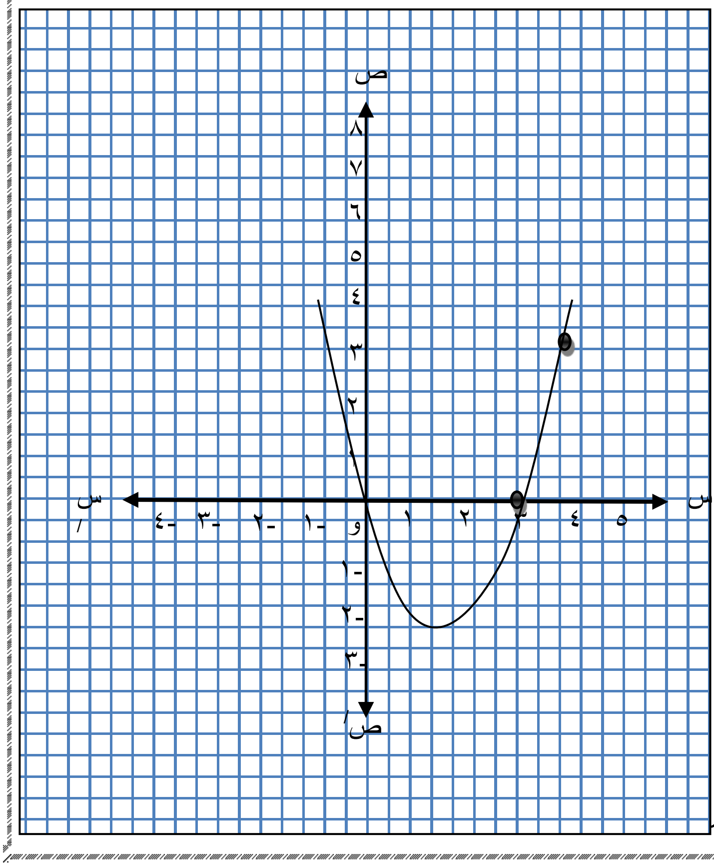


مجموعة حل المعادلة س^{٢} – ٤س + ٣ = ٠ هى {١ ، ٣}

مثال ٢ : ارسم الشكل البيانى للدالة د(س) = س^{٢} – ٣س فى الفترة [-١ ، ٤] ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} – ٣س = ٠

الحل :

س	س^{٢}	-٣س	ص	(س ، ص)
-١	١	٣	٤	(-١ ، ٤)
٠	٠	٠	٠	(٠ ، ٠)
١	١	-٣	-٢	(١ ، -٢)
٢	٤	-٦	-٢	(٢ ، -٢)
٣	٩	-٩	٠	(٣ ، ٠)
٤	١٦	-١٢	٤	(٤ ، ٤)



مجموعة حل المعادلة س^{٢} – ٣س = ٠ هى {٠ ، ٣}

تمـا ريـن

(١)ارسم الشكل البيانى للدالة د(س) = س^{٢} − ٢س + ١ فى الفترة [-١ ، ٣] ومن الرسم أوجد جذرى المعادلة : س^{٢} − ٢س + ١ = ٠

(٢)ارسم الشكل للبيانى للدالة د(س) = س^{٢} − ٢س على الفترة [-٢ ، ٤] ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : س^{٢} − ٢س = ٠

(٣)ارسم الشكل للبيانى للدالة د(س) = ٤ − س^{٢} على الفترة [-٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : س^{٢} − ٤ = ٠

القـانـون الـعـام لـحـل مـعـادلـة الـدرجـة الـثـانـيـة فـى مـتـغـيـر واحـد جـبـريـاً

لحل معادلة الدرجة الثانية على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ نستخدم القانون

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

حيث أ معامل س^{٢} ، ب معامل س ، جـ الحد المطلق

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ

قيمة موجبة : المعادلة لها حلان حقيقيان مختلفان
قيمة سالبة : المعادلة ليس لها حل م . ح = ∅
صفر : المعادلة لها حلان حقيقيان متساويان أو حل وحيد

مثال ١ : أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} − ٢س − ٤ = صفر حيث س ∋ ح (علماً بأن $\sqrt{٥} \simeq ٢,٢٤$)

الحل :

∵ المعادلة س^{٢} − ٢س − ٤ = صفر على صورتها العامة ∴ أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = -٤

المميز = ب^{٢} - ٤ أ جـ = (-٢)^{٢} − ٤ × ١ × -٤ = ٤ + ١٦ = ٢٠

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٠}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٠}}{٢} \quad ∴ س = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ \times ٥}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٥}}{٢}$$

بأخذ العدد ٢ عامل مشترك ∴ = ١ ± $\sqrt{٥}$ ∴ س = ١ + $\sqrt{٥}$ = ٣,٢ أو س = ١ − $\sqrt{٥}$ =- ١,٢

م . ح = {٣,٢ ، - ١,٢}

مثال ٢ : أوجد مجموعة حل المعادلة : $س - \frac{٥}{س} = ٧$

الحل : يجب أن تكون المعادلة على صورتها العامة ∴ نضرب المعادلة × س ∴ $س^{٢} - ٥ = ٧س$

∴ $س^{٢} - ٧س - ٥ = $ صفر ∴ أ = ١ ، ب = -٧ ، جـ = -٥

المميز = $ب^{٢} - ٤$ أ جـ $= (-٧)^{٢} - ٤ × ١ × -٥ = ٤٩ + ٢٠ = ٦٩$

$$∵ س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٧ \pm \sqrt{٦٩}}{٢}$$

$$∴ س = \frac{٧ + \sqrt{٦٩}}{٢} = ٧,٦٥ \text{ أو } س = \frac{٧ - \sqrt{٦٩}}{٢} = -٠,٦٥$$

∴ م . ح = {٧,٦٥ ، -٠,٦٥}

تمارين

حل المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقمين عشريين :

١) $س (س - ٣) = ٩$ ٢) $س^{٢} = ٢(س + ٦)$ ٣) $٢س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$

٤) $٣س^{٢} = ٦س - ١$ ٥) $س - ٢ = \frac{١}{س}$ ٦) $س^{٢} - ٢س = ١$

حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية جبرياً

قبل البدء فى هذا الجزء سوف نقوم بمراجعة سريعة على تحليل المقادير الجبرية :

١) إذا كان المقدار ثلاثى فإن يتحلل كما يلى : مثلاً : $س^{٢} + ٧س + ١٢ = (س + ٣)(س + ٤)$

، $س^{٢} - ٨س + ١٢ = (س - ٦)(س - ٢)$

، $٣س^{٢} + ٥س - ١٢$ تحلل عن طريق المقص وتساوى = $(٣س - ٤)(س + ٣)$

٢) فرق بين مربعين : $س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص)(س + ص)$

مثلاً : $س^{٢} - ١٦ = (س - ٤)(س + ٤)$ ، $٤س^{٢} - ٢٥ص^{٢} = (٢س - ٥ص)(٢س + ٥ص)$

٣) فرق بين مكعبين : $س^٣ - ص^٣ = (س - ص)(س^٢ + س ص + ص^٢)$

فمثلاً : $س^٣ - ٨ = (س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)$

٤) مجموع مكعبين : $س^٣ + ص^٣ = (س + ص)(س^٢ - س ص + ص^٢)$

فمثلاً : $٨س^٣ + ٦٤ = (٢س + ٤)(٤س^٢ - ٨س + ١٦)$

٥) المربع الكامل : $(\sqrt{الأول} \pm \sqrt{الثانى})^٢$:

فمثلاً : $٢٥س^٢ + ٢٠س + ٤ = (٥س + ٢)^٢$

والعكس عند فك قوس المربع الكامل المكون من حدين يعطينا مقدار مكون من ثلاثة حدود وهو عبارة عن : $(الحد الأول)^٢ \pm (الحد الأول \times الثانى \times ٢) + (الحد الثالث)^٢$

فمثلاً : $(٤ص - ٣)^٢ = ١٦ص^٢ - (٤ص \times ٣ \times ٢) + ٩ = ١٦ص^٢ - ٢٤ص + ٩$

٦) إخراج العامل المشترك : مثلاً : $٢س - ٦ = ٢(س - ٣)$ ، $س^٢ - ٢س = س(س - ٢)$

لاحظ المعادلات الآتية : $س^٢ + ٥ص^٢ + ٢ = ٠$ ، $٣س^٢ + ص^٢ = ٧$

، $س^٢ + ٧ س ص + ٨ص^٢ = ٩$ ، كلاهما معادلات من الدرجة الثانية وفى متغيرين (مجهولين)

أما المعادلات : $٣س + ص = ٨$ ، $س + ص = ١$ معادلات من الدرجة الأولى فى متغيرين

وسوف نقوم بحل معادلتين من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية فى مجهولين والأمثلة التالية توضح :

مثال ١ : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : $س - ص = ٢$ ، $س^٢ + ص^٢ = ١٠$

الحل :

فى هذه المسائل نعوض عن س أو ص بدلالة الأخر ثم نعوض عنه فى معادلة الدرجة الثانية

من المعادلة (١) $\therefore$ $\boxed{س = ٢ + ص}$ بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة (٢)

$\therefore (٢ + ص)^٢ + ص^٢ = ١٠ \quad \therefore ٤ + ٤ص + ص^٢ + ص^٢ = ١٠$

$\therefore ٢ص^٢ + ٤ص - ٦ = ٠$ بالقسمة على ٢ $\quad \therefore ص^٢ + ٢ص - ٣ = ٠$ وبالتحليل

$\therefore (ص + ٣)(ص - ١) = ٠ \quad \therefore ص + ٣ = ٠$ أو $ص - ١ = ٠$

$\therefore ص = -٣$ أو $ص = ١$

ومنها س = ٢ -٣ = -١ أو س = ٢+١ = ٣ ∴م . ح = {(-١ ، -٣) ، (٣ ، ١)}

مثال ٢ : أوجد مجموعة حل المعادلتين : ص – س = ٣ ، $س^{٢}$ + س ص = ٥

الحل :

من المعادلة الأولى $\boxed{ص = ٣ + س}$ بالتعويض عن قيمة ص فى المعادلة الثانية

∴ $س^{٢}$ + س (٣ + س) = ٥ ∴ $س^{٢}$ + ٣س + $س^{٢}$ – ٥ = ٠ ∴ ٢$س^{٢}$ + ٣س – ٥ = ٠

∴ بالتحليل (٢س + ٥) (س – ١) = ٠

اما ٢س = -٥ | أو س = ١

∴ س = $\frac{-٥}{٢}$ ، | س = ١

∴ ص = ٣ + ($\frac{-٥}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ | أو ص = ٣ + ١ = ٤ ∴ م . ح = {($\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) ، (١ ، ٤)}

مثال ٣ : أوجد مجموعة حل المعادلتين : س = ٥ – ص ، $س^{٢}$ – $ص^{٢}$ = ٥٥

الحل :

من المعادلة الأولى $\boxed{س = ٥ – ص}$ بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة الثانية

∴ $(٥ – ص)^{٢}$ – $ص^{٢}$ = ٥٥ ∴ ٢٥ – ١٠ص + $\cancel{ص^{٢}}$ – $\cancel{ص^{٢}}$ = ٥٥

∴ -١٠ص = ٥٥ – ٢٥ ∴ - ١٠ص = ٣٠ ومنها ص = -٣

∴ س = ٥ – (- ٣) ∴ س = ٨ ∴ م . ح = {(٨ ، - ٣)}

مثال ٤ : أوجد مجموعة حل س + ص = ٣ ، س ص – ٢ = ٠

الحل :

من المعادلة الأولى $\boxed{س = ٣ – ص}$ بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة الثانية

∴ (٣ – ص) × ص – ٢ = ٠ ∴ ٣ص – ص^{٢} – ٢ = ٠ نترب حدود المعادلة تنازلياً حسب قوى ص

∴ - ص^{٢} + ٣ص – ٢ = ٠ نضرب المعادلة × - ١ لكى نجعل معامل ص^{٢} موجباً

∴ ص^{٢} – ٣ص + ٢ = ٠ ومنها (ص – ٢) (ص – ١) = ٠

∴ ص = ٢	ص = ١
∴ س = ٣ – ٢ = ١	س = ٣ – ١ = ٢

∴ م . ح = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

مثال ٥ : عددان حقيقيان مجموعهما ٧ والفرق بين مربعيهما ٧ أوجد العددين .

الحل :

نفرض أن العدد الأكبر س والعدد الأصغر ص

∴ س + ص = ٧ ⟵ (١) ، س^{٢} – ص^{٢} = ٧ ⟵ (٢)

من المعادلة الأولى $\boxed{\text{س = ٧ – ص}}$ بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة الثانية

∴ (٧ – ص)^{٢} – ص^{٢} = ٧ ∴ ٤٩ – ١٤ص + ص^{٢} – ص^{٢} = ٧ ∴ - ١٤ص = ٧ – ٤٩

∴ - ١٤ص = - ٤٢ ومنها ص = ٣ ∴ س = ٧ – ٣ = ٤ ∴ العددان هما ٤ ، ٣

تذكر أن محيط المستطيل = ٢ × (الطول + العرض) ، مساحة المستطيل = الطول × العرض

محيط المربع = طول الضلع × ٤ ، مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

مثال ٥ : مستطيل مساحته ٥٤سم^{٢} ، ومحيطه ٣٠سم أوجد بعديه .

الحل :

نفرض أن بعدى المستطيل هما س سم ، ص سم

∴ ٢(س + ص) = ٣٠ ∴ ٢س + ٢ص = ٣٠ بالقسمة على ٢ ∴ س + ص = ١٥ ⟵(١)

، مساحة المستطيل هى س ص = ٥٤ ⟵(٢)

من المعادلة الأولى $\boxed{\text{س} = ١٥ - \text{ص}}$ بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة الثانية

∴ (١٥ – ص) × ص = ٥٤ ∴ ١٥ص – ص^{٢} – ٥٤ = ٠ ترتيب حدود المعادلة تنازلياً تبعاً لقوى ص

∴ - ص^{٢} + ١٥ص – ٥٤ = ٠ بالضرب × (- ١) ∴ ص^{٢} – ١٥ص + ٥٤ = ٠

∴ بالتحليل (ص – ٩) (ص – ٦) = ٠ ومنها ص = ٩ أو ص = ٦

∴ س = ١٥ – ٩ = ٦ أو س = ١٥ – ٦ = ٩ ∴ بعدى المستطيل هما ٩سم ، ٦سم

تمارين

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

١) مجموعة حل المعادلتين : س + ص = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٠ فى ح هى ....

((١ ، ١) ، (١ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (٠ ، ٠))

٢) إذا كان س = ١ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢ فإن ص = ... ({١} ، {-١} ، {١ ، -١} ، {١ ، ٢})

٣) مجموعة حل المعادلة س ص = ٤ ، س = ص هى .....

({(٢ ، ٢)} ، (٣ ، ٢)} ، {(-٢ ، -٢)} ، {(٢ ، -٢)} ، {(٢ ، ٢)})

---

(٢) حل المعادلات الآتية فى ح :

١) س = - ١ ، س^{٢} + س ص = ١٢

٢) س – ٢ص = ٠ ، س ص = ٢

٣) ص = س + ٢ ، س ص – ٣ = ٠

٤) س + ص = ١ ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٣

٥) ٣س + ص = ٥ ، ٣س ص – ٤س = ٢

---

(٣) مستطيل مساحته ٨٠سم^{٢} فإذا نقص طوله بمقدار ١سم وزاد عرضه بمقدار ١سم أصبح مربعاً أوجد طول وعرض المستطيل .

---

(٤) عددان صحيحان موجبان يزيد أحدهما عن ثلاثة أمثال الآخر بمقدار ١ فإذا كان مجموع مربعيهما ١٧ أوجد العددين .

اختبار الوحدة الأولى

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :ـ

١) إذا كان للمعادلتين س + ٦ص = ٥ ، ٢س + ١٢ص = ك عدد لانهائى من الحلول فإن ك = ...
(٥ ، ٦ ، ١٠ ، ١٢)

٢) المعادلة ٣س + ص + س ص = ١ من الدرجة ...... (الصفرية ، الأولى ، الثانية ، الثالثة)

٣) مجموعة حل المعادلتين : س + ص = ٠ ، ص – ٥ = ٠ هى ......
({(٥ ، ٥)} ، {(-٥ ، -٥)} ، {(٥ ، -٥)} ، {(-٥ ، ٥)})

٤) إذا كان (٣ ، -١) حل للمعادلة ٢س + ٥ص – ٦ = ٠ فإن ٢ = ... (-١ ، ٢ ، ٣ ، ٦)

٥) إذا كان للمعادلتين س + ٥ص = ٦ ، ٣س + ك ص = ١٨ عدد لانهائى من الحلول فإن ك = ...
(٥ ، ١٥ ، ٣ ، ٩)

٦) مجموعة حل المعادلتين ٢س + ٦ = ٠ ، ص = ٠ هى .....
((٠ ، -٣)} ، {(-٣ ، -٣)} ، {(-٣ ، ٠)} ، {(٣ ، ٠)})

---

(٢) أوجد مجموعة حل كل زوج من المعادلات الآتية :

١) ٢س – ص – ٣ = صفر ، س + ٢ص = ٤ ٢) ٢س – ص = ٧ ، ٣س + ص = ٨

٣) س + ٢ص = صفر ، س^{٢} + ص^{٢} = ٥ ٤) س = ص + ٢ ، س^{٢} – ص^{٢} = ٨

---

(٣) حل المعادلات الآتية باستخدام القانون العام :

١) س^{٢} + ٣س = ٢ مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد ٢) س(س – ٣) = ٥ مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد

٣) ٣س^{٢} = ٥س – ١ مقرباً الجواب لرقمين عشريين .

الوحدة الثانية : دوال الكسور الجبرية

أولاً : مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود :

تذكر أن : د(س) = $س^٣$ – $٨س^٢$ + ١٢س هى دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ونلاحظ أن

عند س = ٠ فإن د(٠) = ٠ وعند س = ٢ فإن د(٢) = ٠ وعند س = ٦ فإن د(٦) = ٠

أى أن : مجموعة قيم س التى تجعل د(س) = ٠ هى {٠ ، ٢ ، ٦} وتسمى أصفار الدالة ونرمز لها بالرمز ص (د)
والأمثلة التالية توضح ذلك :

مثال ١ : أوجد مجموعة أصفار دوال كثيرات الحدود الآتية :ـ

١) د(س) = ٣س – ١٥ ٢) ك (س) = $س^٢$ – ٧س + ١٢

٣) م (س) = ٧ ٤) ن (س) = ٠

٥) د(س) = $س^٢$ – ١٦ ٦) ق (س) = $س^٢$ + ٩

٧) ن(س) = $س^٣$ + ١٢٥ ٨) ك (س) = $١٦س^٣$ – ٥٤

الحل :

١) لإيجاد مجموعة أصفار الدالة د(س) = ٣س – ١٥ نحلل المقدار بإخراج العامل المشترك

∴ ٣ (س – ٥) = ٠ ثم نساوى المقدار س – ٥ بالصفر ∴ س – ٥ = ٠ ∴ س = ٥ ∴ $\boxed{\text{ص (د) = \{٥\}}}$

٢) بوضع $س^٢$ – ٧س + ١٢ = ٠ يحلل مقدار ثلاثى ∴ (س – ٤) (س – ٣) = ٠

∴ س – ٤ = ٠ أو س – ٣ = ٠ ومنها س = ٤ أو س = ٣ ∴ $\boxed{\text{ص (ك) = \{٣ ، ٤\}}}$

٣) ∵ م (س) = ٧ ∴ م (س) دالة ثابتة أى أن صورة أى عدد بالدالة تساوى ٧ ∴ لا يوجد عددس يجعل

م(س) = ٠ ∴ $\boxed{\text{ص (م) = } \emptyset}$

٤) ∵ ن(س) = ٠ ∴ صورة أى عدد بالدالة ن = صفر أى أن جميع الأعداد كلها أصفار ∴ $\boxed{\text{ص (ن) = ح}}$

٥) بوضع $س^٢$ – ١٦ = ٠ ∴ (س – ٤) (س + ٤) = ٠ ∴ س = ٤ أو س = -٤ ∴ $\boxed{\text{ص (د) = \{-٤ ، ٤\}}}$

٦) بوضع $س^٢$ + ٩ = ٠ ∴ $س^٢$ = - ٩ ومنها س = ± $\sqrt{-٣٦}$ ∴ ± $\sqrt{-٣٦}$ $\notin$ ح ∴ $\boxed{\text{ص (ق) = } \emptyset}$

٧) بوضع $س^٣ + ١٢٥ = ٠$ ويحلل كمجموع مكعبين ∴ $(س + ٥)(س^٢ - ٥س + ٢٥) = ٠$ ∴ س + ٥ = ٠

ومنها س = - ٥ ∴ $\boxed{ص(ن) = \{-٥\}}$

٨) بوضع $١٦س^٣ - ٥٤ = ٠$ ∴ $٢(٨س^٣ - ٢٧) = ٠$ ∴ $٢(٢س - ٣)(٤س^٢ + ٦س + ٩)$

ومنها ٢س - ٣ = ٠ ∴ ٢س = ٣ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\boxed{ص(ك) = \{\frac{٣}{٢}\}}$

مثال ٢ : إذا كانت مجموعة أصفار الدالة $د(س) = ٩ س^٢ + ب س + ١٥$ هى {٣ ، ٥} فأوجد قيمة كلاً من ٩ ،ب

الحل :

∵ ص (د) = {٣ ، ٥} ∴ د(٣) = ٩ ٩ + ٣ب = - ١٥ بالقسمة على ٣ ∴ ٣ ٩ + ب = - ٥ ← (١)

، د(٥) = ٢٥ ٩ + ٥ب = - ١٥ بالقسمة على ٥ ∴ ٥ ٩ + ب = - ٣ ← (٢) بطرح (١) من (٢)

∴ ٢ ٩ = ٢ ∴ $\boxed{٩ = ١}$ ، ٣ + ب = - ٥ ∴ ب = - ٥ - ٣ ∴ $\boxed{ب = - ٨}$

تمارين

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :ـ

١) مجموعة أصفار الدالة $د(س) = س^٢ + ٤$ هى ..... ({٢} ، {-٢} ، {-٢ ، ٢} ، ∅)

٢) مجموعة أصفار الدالة $د(س) = س^٢$ هى ..... (∅ ، {صفر} ، {س} ، {٢})

---

(٢) أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية :ـ

١) $ك(س) = ٥س^٥ - ٤٠س^٢$ ٢) $د(س) = س^٣ - س^٢ + س - ١$

٣) $ن(س) = (س - ٣)^٣$ ٤) $د(س) = ٩ - ٤س^٢$

ثانياً : دالة الكسر الجبرى

الدالة الكسرية الجبرية على الصورة : $\frac{ق(س)}{ك(س)}$ مثلاً $\frac{س + ٣}{س - ١}$ تسمى دالة كسرية لأنها تتكون من بسط ومقام

١) مجموعة أصفار الدالة الكسرية = أصفار البسط – أصفار المقام

٢) مجال الدالة الكسرية = ح – مجموعة أصفار المقام

مثال ١ : عين أصفار كلاً من الدوال الآتية :

١) د(س) = $\frac{٢س}{س - ٣}$ ٢) د(س) = $\frac{س + ١}{س^٣ + ٨}$

الحل :

١) د(س) = $\frac{٢س}{س - ٣}$ أصفار البسط = {٠} ، أصفار المقام = {٣} ∴ أصفار الدالة = {٠} – {٣} = {٠}

٢) د(س) = $\frac{س + ١}{س^٣ + ٨}$ أصفار البسط = { - ١} ، أصفار المقام = {- ٢} ∴ أصفار الدالة = {- ١}

مثال ٢ : عين مجال كل من الدوال الكسرية الجبرية الآتية :-

١) د(س) = $\frac{س + ٣}{س - ٢}$ ٢) ن(س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ١٦}$ ٣)د(س) = $\frac{٢س + ٥}{س^٢ + ٩}$

٤) ن(س) = $\frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س^٣ - ٧س^٢ + ١٢س}$ ٥) د(س) =$\frac{س + ٢}{س^٣ - ٢٧}$ ٦) ن(س) = $\frac{٣س + ١٥}{٧}$

الحل :

١) ∵ س – ٢ = ٠ ∴ ص (د) = {٢} ∴ المجال = ح – أصفار المقام ∴ المجال = ح – {٢}

٢) ∵ $س^٢$ – ١٦ = (س – ٤) (س + ٤) ∴ ص (ن) = {٤ ، - ٤} ∴ المجال = ح – {٤ ، - ٤}

٣) ∵ $س^٢$ + ٩ = ٠ ∴ ص (د) = ∅ ∴ المجال = ح

٤) ∵ س^{٣} – ٧س^{٢} + ١٢س = س (س – ٣) (س – ٤) ∴ص (ن) = {٠ ، ٣ ، ٤}
∴ المجال = ح – {٠ ، ٣ ، ٤}

٥) ∵ س^{٣} – ٢٧ = (س – ٣) (س^{٢} + ٣س + ٩) ∴ص (د) = {٣} ∴ المجال = ح – {٣}

٦) ن(س) = $\frac{٣س + ١٥}{٧}$ ∵ ص (د) = ∅ ∴ المجال = ح

مثال ٢ : إذا كان مجال الدالة المعطاه بالقاعدة ن (س) = $\frac{س + ب}{س + أ}$ هوح – {٣} ، ن (٠) = - ٣ أوجد قيمتى أ ، ب

الحل :

∵ س + أ = ٠ عندما س = - أ ∴ مجال الدالة هوح – { - أ } والمجال المعطى ح – {٣} ∴ - أ = ٣
∴ $\boxed{أ = - ٣}$

، ن (٠) = $\frac{٠ + ب}{٠ + أ}$ = $\frac{ب}{أ}$ ∴ - ٣ = $\frac{ب}{-٣}$ ∴ $\boxed{ب = ٩}$

تمارين

(١) عين مجال كل من الدوال الآتية :

١) ن(س) = $\frac{س^{٢} + ٣}{٢س^{٣} – ١٦}$ ٢) د(س) = $\frac{٣س}{٢س^{٣} – ٢س^{٢} – ٢٤س}$

---

(٢) إذا كان ن(س) = $\frac{ب س + ٢}{س^{٢} – أ س}$ ، مجال ن(س) = ح – {٠ ، ٥} فأوجد قيمة أ ، وإذا كان د(٢) = - ٢ فأوجد قيمة ب

ثالثاً : المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر

المجال المشترك لعدد من الكسور = ح – مجموعة أصفار مقامات هذه الكسور

مثال ١ : أوجد المجال المشترك للكسور الجبرية الآتية :

١) $د_١(س) = \frac{٤}{س^٢ + س}$ ، $د_٢(س) = \frac{١}{س^٢ + ٣س + ٢}$ ، $د_٣(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - ٤}$

٢) $ن_١(س) = \frac{٢س + ٣}{س^٢ - ٢٥}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ٧}{٤س^٢ - ٩}$ ، $ن_٣(س) = \frac{س^٢ + ١}{٢س^٢ - ٧س - ١٥}$

الحل :

١) ∵ $س^٢ + س = س (س + ١)$ ∴ $ص(د_١) = \{٠ ، -١\}$

، ∵ $س^٢ + ٣س + ٢ = (س + ١) (س + ٢)$ ∴ $ص(د_٢) = \{-١ ، -٢\}$

، ∵ $س^٢ - ٤ = (س - ٢) (س + ٢)$ ∴ $ص(د_٣) = \{٢ ، -٢\}$

∴ $ص(د_١) \cup ص(د_٢) \cup ص(د_٣) = \{٠ ، -١ ، -٢ ، ٢\}$

∴ $\boxed{\text{المجال المشترك} = ح - \{٠ ، -١ ، -٢ ، ٢\}}$

٢) ∵ $س^٢ - ٢٥ = (س - ٥) (س + ٥)$ ∴ $ص(ن_١) = \{٥ ، -٥\}$

، ∵ $٤س^٢ - ٩ = (٢س - ٣) (٢س + ٣)$ ∴ $ص(ن_٢) = \{\frac{٢}{٣} ، -\frac{٢}{٣}\}$

، ∵ $٢س^٢ - ٧س - ١٥ = (٢س + ٣) (س - ٥)$ ∴ $ص(ن_٣) = \{-\frac{٢}{٣} ، ٥\}$

∴ $\boxed{\text{المجال المشترك} = ح - \{٥ ، -٥ ، \frac{٢}{٣} ، -\frac{٢}{٣}\}}$

تمرين : عين المجال المشترك للكسور الجبرية الآتية:-

$\frac{٤س + ٤}{س^٢ + ٤س + ٤}$ ، $\frac{س^٢ - ٣}{س^٢ + ٢س - ٨}$

رابعاً : اختزال الكسر الجبرى إلى أبسط صورة

اختزال الكسر الجبرى هو تحليل كلاً من البسط والمقام ثم تعيين المجال وهو ح – أصفار المقام ثم حذف المتشابه بين البسط والمقام

هاااااام جداااااً : يجب تعيين المجال قبل الحذف (الاختصار)

مثال ١ : أوجد ن(س) فى أبسط صورة موضحاً المجال : إذا كان ن(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢}$

الحل :

$\because$ ن(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢} = \frac{(\text{س} - ٢)\cancel{(\text{س} + ٢)}}{(\text{س} - ٦)\cancel{(\text{س} + ٢)}}$ $\therefore$ المجال = ح – {٦ ، -٢}

وحيث أن (س + ٢) عامل مشترك بين كل من البسط والمقام إذن نقوم بحذفها

$\therefore$ ن (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٦}$

خامساً : تساوى كسرين جبريين

يقال أن : ن (س) = ن (س) إذا كان

- مجال ن$_{١}$(س) = مجال ن$_{٢}$ (س)
- قيمة ن$_{١}$(س) = قيمة ن$_{٢}$ (س)

مثال ١ : إذا كان ن$_{١}$ (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}}$ ، ن$_{٢}$ (س) = $\frac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س}^{٤} - \text{س}}$ فإثبت أن : ن$_{١}$ = ن$_{٢}$

الحل :

$\because$ ن$_{١}$ (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}} = \frac{\cancel{\text{س}^{٢}}}{\cancel{\text{س}^{٢}}(\text{س} - ١)}$ مجال ن$_{١}$ (س) = ح – {٠ ، ١}

$\therefore$ ن$_{١}$ (س) = $\frac{١}{\text{س} - ١}$

$$\because\ ن(س) = \frac{س^{٣} + س^{٢} + س}{س^{٤} - س} = \frac{س(س^{٢} + س + ١)}{س(س^{٣} - ١)} = \frac{\cancel{س}\,\cancel{(س^{٢} + س + ١)}}{\cancel{س}\,(س - ١)\,\cancel{(س^{٢} + س + ١)}}$$

مجال $ن(س) = ح - \{٠ ، ١\}$ $\quad\therefore\ ن(س) = \frac{١}{س - ١}$

$\because$ مجال $ن(س) =$ مجال $ن(س)$ ، $ن(س) = ن(س)$ $\quad\therefore\ ن = ن$

مثال ٢ : إذا كان $ن(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ٤س + ٣}$ ، $ن(س) = \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان

الحل :

$ن(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ٤س + ٣} = \frac{\cancel{س - ١}}{(س - ٣)\,\cancel{(س - ١)}}$ مجال $ن(س) = ح - \{٣ ، ١\}$

$\therefore\ ن(س) = \frac{١}{س - ٣}$

$ن(س) = \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٥س + ٦} = \frac{\cancel{س - ٢}}{(س - ٣)\,\cancel{(س - ٢)}}$ مجال $ن(س) = ح - \{٢ ، ٣\}$

$\therefore\ ن(س) = \frac{١}{س - ٣}$

$\because\ ن(س) = ن(س)$ ولكن مجال $ن(س) \neq$ مجال $ن(س)$

$\therefore\ ن = ن$ فى المجال المشترك $ح - \{٣ ، ١ ، ٢\}$

تمرين : إذا كان $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{س^{٢} - ٦س + ٩}$ ، $ن(س) = \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٣} - ٣س^{٢} + س - ٣}$ هل $ن = ن$ ؟ ولماذا ؟

العمليات على الكسور الجبرية :

<u>أى عملية تجرى على الكسور الجبرية تمر بالخطوات الأربعة التالية :</u>

تحليل - مجال - اختزال - عملية من العمليات الأربعة (جمع – طرح – ضرب – قسمة)

أولاً : جمع الكسور الجبرية :

<u>ملحوظة هاااامة</u> العمليات على الكسور الجبرية تخضع لنفس العمليات على الأعداد النسبية :

١) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}}$ مثلاً $\frac{٣}{٧} + \frac{٢}{٧} = \frac{٥}{٧}$

٢) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ د} + \text{ب جـ}}{\text{ب د}}$ مثلاً $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥} = \frac{١٠ + ٣}{١٥} = \frac{١٣}{١٥}$

مثال ١ : أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبيناً المجال : $\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣} + \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}$

الحل :

$\text{ن(س)} = \frac{\cancel{\text{س} - ٣}}{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س} - ١)} + \frac{(\text{س} - ٢)(\cancel{\text{س} + ٢})}{(\cancel{\text{س} + ٢})(\text{س} - ١)}$ المجال = ح – {٣ ، ١ ، -٢}

$\therefore \text{ن(س)} = \frac{١}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ١} = \frac{١ + \text{س} - ٢}{\text{س} - ١} = \frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ١} = ١$

مثال ٢ : أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحاً المجال : $\text{ن(س)} = \frac{٢\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢} + \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٤}{\text{س}^٣ + ٨}$

الحل :

$\text{ن (س)} = \frac{٢(\cancel{\text{س} - ١})}{(\text{س} - ٢)(\cancel{\text{س} - ١})} + \frac{\cancel{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٤}}{(\text{س} + ٢)(\cancel{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٤})}$ المجال = ح – {٢ ، ١ ، -٢}

$$ن(س) = \frac{٢}{س - ٢} + \frac{١}{س + ٢} = \frac{٢س + ٤ + س - ٢}{(س - ٢)(س + ٢)} = \frac{٣س + ٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

تمارين

أوجد ن فى أبسط صورة مبيناً المجال :

١) $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ٤}{س^٣ + ٨} + \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س - ١}$

٢) $ن(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦س}{س^٢ - ٤س + ٣} + \frac{س^٤ + ٨س}{س^٢ - ٢س + ٤}$

٣) إذا كان مجال الدالة ن حيث $ن(س) = \frac{ب}{س} + \frac{٩}{س + أ}$ هو ح − {٠ ، ٤} ، ن (٥) = ٢ أوجد قيمة كل من أ ، ب

ثانياً : طرح الكسور الجبرية

طرح الكسور له نفس خطوات وطريقة حل جمع الكسور من حيث إذا كانت المقامات متحدة أو مختلفة

١) $\frac{أ}{ب} - \frac{ج}{ب} = \frac{أ - ج}{ب}$ مثلاً $\frac{٣}{٧} - \frac{٢}{٧} = \frac{١}{٧}$

٢) $\frac{أ}{ب} - \frac{ج}{د} = \frac{أ د - ب ج}{ب د}$ مثلا $\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٥} = \frac{١٠ - ٣}{١٥} = \frac{٧}{١٥}$

مثال ١ : أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبيناً المجال : $ن(س) = \frac{س^٢ + ٣س}{س^٢ - ٩} - \frac{٣س + ٣}{س^٢ - ٢س - ٣}$

الحل :

$$ن(س) = \frac{س\cancel{(س + ٣)}}{(س - ٣)\cancel{(س + ٣)}} - \frac{٣\cancel{(س + ١)}}{(س - ٣)\cancel{(س + ١)}}$$ المجال = ح − {٣ ، −٣ ، −١}

$$ن(س) = \frac{س}{س - ٣} - \frac{٣}{س - ٣} = \frac{س - ٣}{س - ٣} = ١$$

خواص عمليتى جمع وطرح الكسور الجبرية

*عملية جمع الكسور الجبرية لها الخواص الآتية :

١) الإبدال ،   ٢) الدمج ،   ٣) الصفر هو العدد المحايد الجمعى لأى كسر جبرى

٤) توافر المعكوسات الجمعية : المعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{ك}(\text{س})}$ هو $-\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{ك}(\text{س})}$ أو $\frac{-\text{ق}(\text{س})}{\text{ك}(\text{س})}$ أو $\frac{\text{ق}(\text{س})}{-\text{ك}(\text{س})}$

فمثلاً المعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{٣}{\text{س} - ٥}$ هو $-\frac{٣}{\text{س} - ٥}$ أو $\frac{-٣}{\text{س} - ٥}$ أو $\frac{٣}{٥ - \text{س}}$

*عملية طرح الكسور الجبرية لا يتحقق فيها أى من الخواص السابقة

مجال الكسر الجبرى = مجال معكوسه الجمعى

مثال ٢ : أوجد ن (س) = $\frac{٢\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ - ٤} + \frac{\text{س}}{٢\text{س} - \text{س}^٢}$ فى أبسط صورة مبيناً المجال ثم أوجد ن (١) ،ن(-٢)

الحل :

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ - ٤} - \frac{\text{س}}{\text{س}^٢ - ٢\text{س}} = \frac{٢(\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)} - \frac{\text{س}}{\text{س}(\text{س} - ٢)}$$

المجال = ح − {٢ ، -٢ ، ٠ }

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س} - ٢} - \frac{١}{\text{س} - ٢} = \frac{٢ - ١}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{\text{س} - ٢}$$

$\text{ن}(١) = \frac{١}{١ - ٢} = \frac{١}{-١} = -١$ ، ن (- ٢) غير معرفة لأن − ٢ $\notin$ لمجال ن

تمارين

(١) أوجد ن (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٢} - \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}$ فى أبسط صورة مبيناً المجال

(٢) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن حيث : ن (س) = $\frac{١٢}{١٢\text{س}^٢ - ٣} + \frac{٢}{٢\text{س} - ٤\text{س}^٢}$

ثم أوجد: ن (٠) ، ن (-١) إن أمكن ذلك

ثالثاً : ضرب الكسور الجبرية

ضرب الكسور الجبرية مثل ضرب الأعداد النسبية . مثلاً $\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٨}{١٥}$

وأيضاً عند ضرب كسرين جبريين نضرب البسط × البسط ، المقام × المقام ويكون مجال حاصل الضرب هو المجال المشترك قبل الاختزال مثل الجمع والطرح

مثال ١ : أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبيناً المجال : $ن(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س + ٥} \times \frac{٢س + ٥}{س^{٢} + ٢س + ٤}$

الحل :

$ن(س) = \frac{(س - ٢)\cancel{(س^{٢} + ٢س + ٤)}}{\cancel{س + ٥}} \times \frac{٢\cancel{(س + ٥)}}{\cancel{(س^{٢} + ٢س + ٤)}}$ المجال = ح − {-٥ }

$ن(س) = (س - ٢) \times ٢ = ٢س - ٤$

مثال ٢ : أوجد ن (س) = $\frac{س^{٢} + ٥س}{س^{٢} + س - ٦} \times \frac{س^{٢} - ٧س + ١٠}{س^{٢} - ٢٥}$

الحل :

$ن(س) = \frac{س\cancel{(س + ٥)}}{(س + ٣)\cancel{(س - ٢)}} \times \frac{\cancel{(س - ٥)}\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{(س + ٥)}\cancel{(س - ٥)}}$ المجال = ح − {-٣ ، ٢ ، ٥ ، -٥}

$ن(س) = \frac{س}{س + ٣}$

تمارين

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبيناً المجال :

١) $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} + س - ٦} \times \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + ٢س + ٤}$

٢) $\frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س^{٣} - ٢٧} \times \frac{س^{٣} + ٣س^{٢} + ٩س}{س^{٢} + ٧س}$

خواص عملية ضرب الكسور الجبرية :

عملية الضرب لها الخواص الآتية : الإبدال ، الدمج ، الواحد هو المحايد الضربى ، المعكوس الضربى

المعكوس الضربى للكسر الجبرى :

إذا كان : ن كسراً جبرياً حيث ن (س) = $\frac{و(س)}{ك(س)}$ فإن ن يكون له معكوس ضربى هو الكسر الجبرى ن$^{-١}$

حيث ن$^{-١}$ (س) = $\frac{ك(س)}{و(س)}$ ويكون المجال الذى يجعله معكوساً ضربياً هو ح – أصفار البسط والمقام

مثال ١ : إذا كان : ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٢س}{(س - ٢)(س^{٢} + ٢)}$ فأوجد : ن$^{-١}$ (س) فى أبسط صورة

مبيناً مجال ن$^{-١}$ وإذا كان : ن$^{-١}$(س) = ٣ فما قيمة س

الحل :

ن (س) = $\frac{س(\cancel{س - ٢})}{(\cancel{س - ٢})(س^{٢} + ٢)}$ مجال ن$^{-١}$ = ح – {٠ ، ٢}

ن$^{-١}$(س) = $\frac{س^{٢} + ٢}{س}$

∵ ن$^{-١}$ (س) = ٣ ∴ $\frac{س^{٢} + ٢}{س}$ = ٣ ∴ س^{٢} + ٢ = ٣س ∴ س^{٢} – ٣س + ٢ = ٠ وبالتحليل

∴ (س – ٢) (س – ١) = ٠ ومنها س = ٢ أو س = ١

رابعاً : قسمة الكسور الجبرية :

قسمة الكسور الجبرية أيضاً مثل قسمة الأعداد النسبية فمثلاً : $\frac{٢}{٣} \div \frac{٧}{٥} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{٧} = \frac{١٠}{٢١}$

فإذا كان : $\frac{٣س}{س + ٢} \div \frac{س}{س + ٢} = \frac{٣س}{س + ٢} \times \frac{س + ٢}{س} = ٣$

ويكون المجال هو ح – أصفار مقام الكسر الأول وبسط ومقام الكسر الثانى = ح – {-٢ ، ٠}

مثال ١ : أوجد ن (س) = $\frac{س^٢ - ٧س + ١٠}{س^٢ - ٤س - ٥} \div \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ + ٢س + ٤}$ فى أبسط صورة مبيناً المجال

الحل :

ن (س) = $\frac{(س - ٢)(س - ٥)}{(س - ٥)(س + ١)} \div \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{س^٢ + ٢س + ٤}$ المجال = ح − {٥ ، -١ ، ٢}

ن(س) = $\frac{(\cancel{س - ٢})(\cancel{س - ٥})}{(\cancel{س - ٥})(س + ١)} \times \frac{\cancel{س^٢ + ٢س + ٤}}{(\cancel{س - ٢})(\cancel{س^٢ + ٢س + ٤})}$ ∴ ن(س) = $\frac{١}{س + ١}$

تمارين

١) أوجد ن (س) = $\frac{س^٢ - ٩}{٢س^٢ + ٣س} \div \frac{٣س^٢ + ٦س - ٤٥}{٤س^٢ - ٩}$

٢) إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٣ - س^٢ - ٢س}{س^٢ - ٥س + ٦} \div \frac{س^٣ + ٦س^٢ + ٥س}{س^٢ + ٢س - ١٥}$ أوجد: ن (س) فى أبسط صورة موضحاً مجال ن ، ثم أوجد إن أمكن : ن (٧) ، ن (٣)

٣) إذا كان : ن (س) = $\frac{س^٢ - ٤٩}{س^٣ - ٨} \div \frac{س + ٧}{س - ٢}$ فأوجد : ن (س) فى أبسط صورة مبيناً مجال ن ، واحسب قيمة ن (١)

الـعـمـلـيـات عـلـى الأحـداث

العملية	الحدث	الاحتمال
(وقوع الحدثين ٩ ، ب معاً)	٩ ∩ ب	ل (٩ ∩ ب) = ل (٩) + ل (ب) – ل (٩ ∪ ب)
وقوع الحدثين ٩ أو ب ، (أحدهما على الأقل)	٩ ∪ ب	ل (٩ ∪ ب) = ل (٩) + ل (ب) – ل (٩ ∩ ب)
(عدم وقوع الحدث ٩)	٩ /	ل (٩ /) = ١ – ل (٩)
(عدم وقوع الحدث ب)	ب /	ل (ب /) = ١ – ل (ب)
(حدث وقوع ٩ فقط) أو أحد الحدث ٩ دون ب	٩ – ب	ل (٩ – ب) = ل (٩) - ل (٩ ∩ ب)
(حدث وقوع ب فقط) أو الحدث ب دون ٩	ب – ٩	ل (ب – ٩) = ل (ب) - ل (٩ ∩ ب)
الحدثان المتنافيان	٩ ∩ ب = ∅	ل (٩ ∩ ب) = صفر

مثال ١ : إذا كان ٩ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (٩) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (٩ ∩ ب) = ٠,٤ أوجد:

٩) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

ب) احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث ٩

جـ) احتمال عدم وقوع الحدث ٩

الحل : ٩) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل ل (٩ ∪ ب) = ل (٩) + ل (ب) – ل (٩ ∩ ب) =

ل (٩ ∪ ب) = ٠,٥ + ٠,٦ – ٠,٤ = ٠,٧

ب) احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث ٩ = ل (ب – ٩) = ل (ب) - ل (٩ ∩ ب)

ل (ب – ٩) = ٠,٦ – ٠,٤ = ٠,٢

جـ) احتمال عدم وقوع الحدث ٩ = ل (٩ /) = ١ – ل (٩) = ١ – ٠,٥ = ٠,٥

تمارين

(١) كيس به ١٢ كرة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ١٢ ، سحبت منه كرة واحدة عشوائياً . فإذا كان أ هو حدث الحصول على عدد فردى ، ب هو حدث الحصول على عدد أولى فأوجد

ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ/) ، ل (أ ∪ ب) ، ل (أ – ب)

---

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ ، ل (ب) = س فأوجد : قيمة س إذا كان :

١) ل (أ ∩ ب) = ٠,٢   ٢) أ ، ب حدثين متنافيين

---

(٣) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤ فأوجد : ل (أ ∪ ب)/

---

(٤) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$

أولاً : أوجد ل(أ ∪ ب) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين

ثانياً : أوجد ل (أ ∩ ب) إذا كان ل(أ ∪ ب) = $\frac{١}{٨}$

---

(٥)) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = ٠,٨ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٦ أوجد : ١) احتمال عدم وقوع الحدثين أ ، ب   ٢) احتمال عدم وقوع الحدث أ

٣) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل   ٤) احتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الأخر